

Некоторые формулы полезные для лучевой трассировки

Определение пересечения луча со сферой

Луч определяется:

- Началом (точка): $\vec{R}_0 = (x_0, y_0, z_0)$
- Направлением (вектор единичной длины): $\vec{R}_d = (x_d, y_d, z_d)$

Тогда луч в параметрической форме записи – это множество точек:

$$\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \vec{R}_d \cdot t, \quad t > 0.$$

Сфера определяется:

- Центром (точка): $\vec{S}_c = (x_c, y_c, z_c)$
- Радиусом (вещественное число): r

Поверхность сферы состоит из множества точек $\vec{S} = (x_s, y_s, z_s)$, удовлетворяющих:

$$(x_s - x_c)^2 + (y_s - y_c)^2 + (z_s - z_c)^2 = r^2$$

или в векторной форме:

$$(\vec{S} - \vec{S}_c)^2 = r^2$$

Форма задания сферы неявная. Трудно генерировать точки поверхности, но для любой точки легко определить принадлежность сфере. Подставим точку луча в уравнение сферы ($\vec{S} = \vec{R}(t)$) и решим относительно t :

$$(\vec{R}_0 + \vec{R}_d \cdot t - \vec{S}_c)^2 = r^2$$

Преобразуем левую часть:

$$\begin{aligned} (\vec{R}_0 + \vec{R}_d \cdot t - \vec{S}_c)^2 &= (\vec{R}_d \cdot t + (\vec{R}_0 - \vec{S}_c))^2 = \\ &= (\vec{R}_d)^2 \cdot t^2 + 2t \cdot (\vec{R}_d, (\vec{R}_0 - \vec{S}_c)) + (\vec{R}_0 - \vec{S}_c)^2 = r^2 \end{aligned}$$

где (\vec{a}, \vec{b}) – скалярное произведение векторов, $(\vec{a})^2 = (\vec{a}, \vec{a})$ – скалярный квадрат.

Так как \vec{R}_d – единичный вектор, $(\vec{R}_d)^2 = 1$, то есть получаем квадратное уравнение:

$$t^2 + 2t \cdot (\overline{R_d}, (\overline{R_0} - \overline{S_c})) + (\overline{R_0} - \overline{S_c})^2 - r^2 = 0.$$

Обозначим:

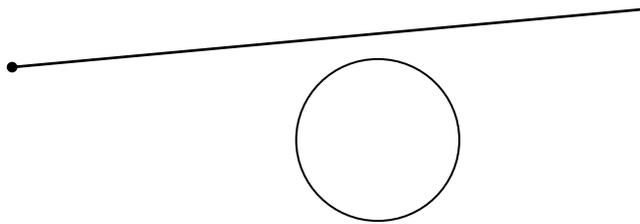
$$B = (\overline{R_d}, (\overline{R_0} - \overline{S_c}))$$

$$C = (\overline{R_0} - \overline{S_c})^2 - r^2$$

И получим:

$$t^2 + 2Bt + C = 0.$$

Если дискриминант $D = B^2 - C$ отрицательный, то пересечений нет:

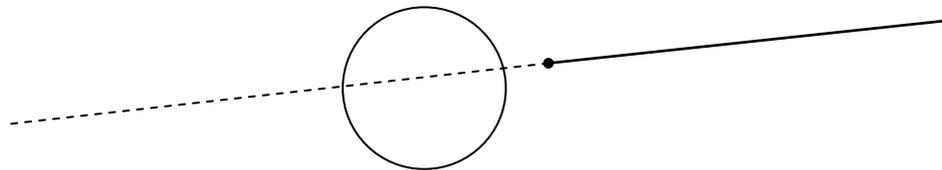


Меньший положительный корень (если существует) определяет ближайшую точку пересечения. Некоторая экономия времени может достигаться, если вычислять сначала меньший корень, а затем при необходимости больший:

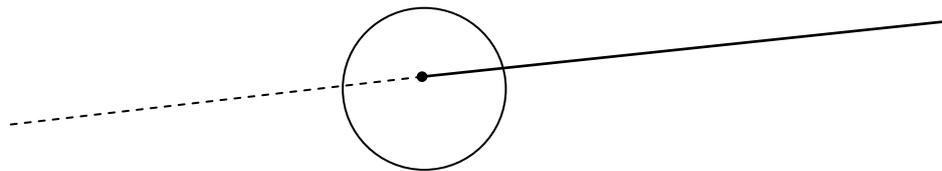
$$t_0 = -B - \sqrt{B^2 - C}, \quad t_1 = -B + \sqrt{B^2 - C}.$$

Здесь возможны три варианта:

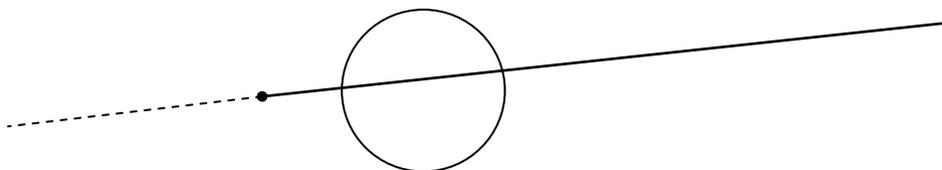
1. $t_0, t_1 < 0$: пересечений нет



2. $t_0 < 0, t_1 > 0$: луч выходит из сферы



3. $t_0, t_1 > 0$: луч входит в сферу



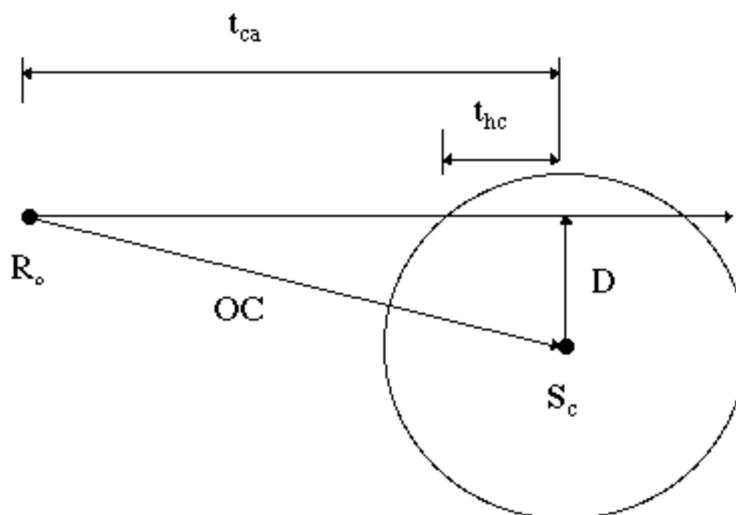
Алгоритм.

1. Вычисляем $B = (\overline{R_d}, (\overline{R_0} - \overline{S_c}))$.

2. Вычисляем $C = (\overline{R_0} - \overline{S_c})^2 - r^2$.
3. Вычисляем дискриминант $D = B^2 - C$.
4. Если дискриминант отрицательный, то возвращаем **false**.
5. Иначе вычисляем t_0 .
6. Если $t_0 < 0$, то вычисляем t_1 , иначе полагаем $t = t_0$ и переходим к пункту 8.
7. Если $t_1 < 0$, то возвращаем **false**, иначе полагаем $t = t_1$.
8. Возвращаем точку пересечения $\overline{R_i} = \overline{R_0} + \overline{R_d} \cdot t$ или по координатам $(x_i, y_i, z_i) = (x_0 + x_d t, y_0 + y_d t, z_0 + z_d t)$
9. Вычисляем нормаль в точке пересечения $\overline{N} = \left(\frac{x_i - x_c}{r}, \frac{y_i - y_c}{r}, \frac{z_i - z_c}{r} \right)$.

Цена этого алгоритма = 17 сложений/вычитаний, 17 умножений, 1 квадратный корень. Это для одного пересечения луча со сферой.

Давайте уменьшим объем вычислений, используя геометрический подход.



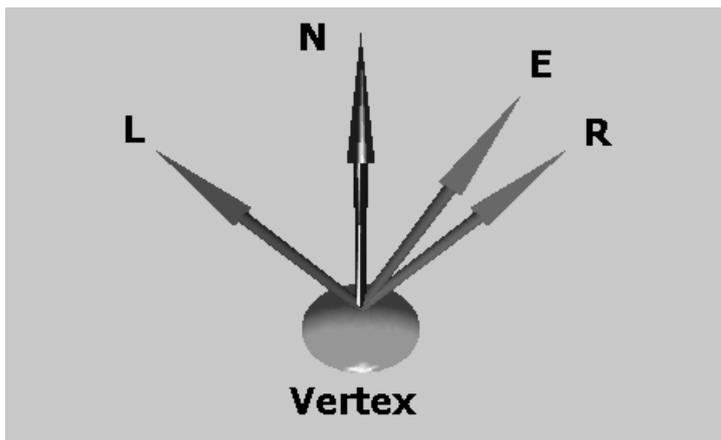
Тогда алгоритм будет выглядеть следующим образом.

1. Определим лежит ли начало луча внутри сферы или вне ее. Вычислим для этого вектор от центра сферы до начала луча – $\overline{OC} = \overline{S_c} - \overline{R_0}$. Если длина OC меньше r , то есть $(\overline{OC})^2 < r^2$, то начало луча лежит внутри сферы.
2. Найдем ближайшую к центру сферы точку луча, расстояние до нее обозначим через D , а через t_{ca} – расстояние от начала луча до этой ближайшей к центру сферы точки. $t_{ca} = (\overline{OC}, \overline{R_d})$ – длина проекции OC на луч.
3. Если $t_{ca} < 0$ и R_0 лежит вне сферы, то луч не пересекает ее.

4. Иначе находим квадрат расстояния $D^2 = (\overline{OC})^2 - t_{ca}^2$. Тогда
- $$t_{hc}^2 = r^2 - D^2 = r^2 - (\overline{OC})^2 + t_{ca}^2.$$
5. Если $t_{hc}^2 < 0$, тогда луч не пересекает сферу.
6. Вычисляем расстояние
- $t = t_{ca} - t_{hc}$, если R_0 лежит вне сферы,
 - $t = t_{ca} + t_{hc}$, если R_0 лежит внутри сферы,
7. Вычисляем точку пересечения $\overline{R}_i = \overline{R}_0 + \overline{R}_d \cdot t$ или по координатам
- $$(x_i, y_i, z_i) = (x_0 + x_d t, y_0 + y_d t, z_0 + z_d t)$$
8. Вычисляем нормаль в точке пересечения $\overline{N} = \left(\frac{x_i - x_c}{r}, \frac{y_i - y_c}{r}, \frac{z_i - z_c}{r} \right)$.

Как видим, данный алгоритм уменьшает общий объем вычислений (в худшем случае) на 4 операции умножения и 1 операцию сложения. И куда меньше вычислений, если луч не попадает в сферу.

Определение вектора отражения



Итак, имеем: L – вектор падающего луча (направление на источник),
 N – вектор нормали,
 R – вектор направления зеркального отражения.

Пусть L и N имеют единичную длину. Требуется найти R . На рисунке вектор E – это направление на глаз, в данном расчете он не используется.

Пусть θ_i – угол между L и N , а θ_r – угол между N и R . Они равны.

Все три вектора находятся в одной плоскости, поэтому $R = aL + bN$.

$(L, N) = \cos \theta_i$, и $(N, R) = \cos \theta_r$. Тогда имеем

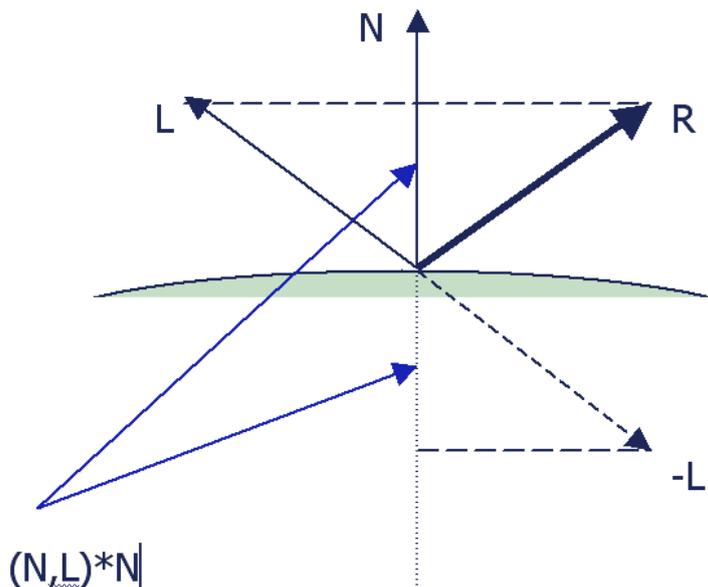
$$(L, N) = (N, R),$$

$$(L, N) = (N, aL + bN) = a(N, L) + b.$$

Пусть $a = -1$, тогда

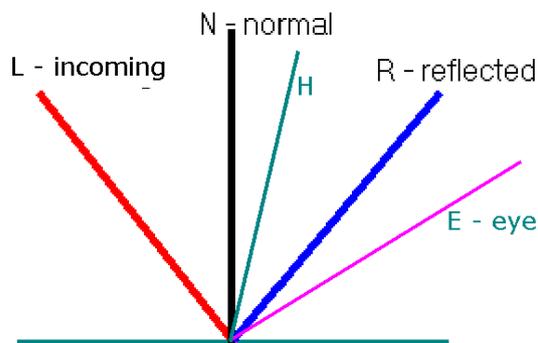
$$R = 2(N, L)N - L.$$

См. также рис.



Примечание. В книге Роджерса приводится очень тяжелый вывод для отраженного луча.

Определение вектора N для подсчета зеркальности



Формула Фонга для оценки зеркального отражения определяется коэффициентом $(\cos \phi)^{n_{shiny}}$ или $(R, E)^{n_{shiny}}$. Вместо этого используется $(H, N)^{n_{shiny}}$, где H - это вектор

биссектрисы угла между векторами L и E . Т.е. единичный вектор $H = \frac{L + E}{\|L + E\|}$.

Очевидно, что картинка получается разная при применении этих двух различных методик подсчета.

Определение вектора преломления

Луч изнутри объекта — всё наоборот

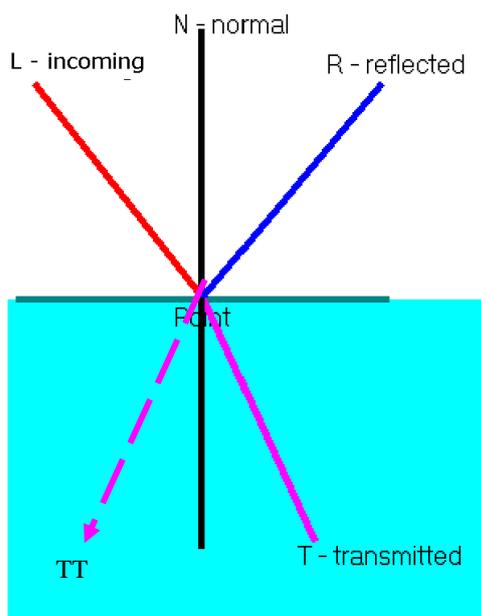
Лучи света проходят через различные среды с различной скоростью. Здесь важным показателем является коэффициент преломления (index of refraction) – скорость света в материале по отношению к скорости света в вакууме, например,

- Воздух – 1.0003
- Вода – 1.33
- Стекло – 1.52

В геометрической оптике преломление луча определяется на основе закона Снеллиуса.

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{\eta_2}{\eta_1},$$

где η_1 – коэффициент преломления среды 1 (сверху на рис.), а η_2 – коэффициент преломления среды 2 (внизу).



Итак, имеем: L – вектор падающего луча (направлен на источник),
 N – вектор нормали,
 T – вектор направления преломленного луча.

Пусть L , N и T имеют единичную длину. Требуется найти T .

Пусть θ_1 – угол между L и N , а θ_2 – угол между $(-N)$ и T . L , N и T лежат в одной плоскости, значит $T = aL + bN$. Ищем a и b .

$$\cos \theta_1 = (N, L), \quad \cos \theta_2 = (-N, T).$$

Пусть $\eta_{it} = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{\eta_1}{\eta_2}$, тогда $\eta_{it}^2 = \frac{\sin^2 \theta_2}{\sin^2 \theta_1} \Rightarrow \sin^2 \theta_1 \eta_{it}^2 = \sin^2 \theta_2$. Учитывая

тождество $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, получим

$$(1 - \cos^2 \theta_1) \eta_{it}^2 = (1 - \cos^2 \theta_2) \Rightarrow -\cos^2 \theta_2 = (1 - \cos^2 \theta_1) \eta_{it}^2 - 1.$$

С другой стороны

$$-\cos^2 \theta_2 = -(-N, (aL + bN))^2 = -(-a \cos \theta_1 - b \cdot 1)^2 = -(a \cos \theta_1 + b)^2.$$

Тогда имеем тождество $(1 - \cos^2 \theta_1) \eta_{it}^2 - 1 = -(a \cos \theta_1 + b)^2$ или
 $(1 - \cos^2 \theta_1) \eta_{it}^2 = 1 - (a^2 \cos^2 \theta_1 + 2abc \cos \theta_1 + b^2)$

Поскольку мы хотим, чтобы T имел единичную длину, то запишем

$1 = (T, T) = (aL + bN, aL + bN) = a^2 + 2abc \cos \theta_1 + b^2$. И подставим эту единицу, т.е. решаем уравнение и получаем

$$(1 - \cos^2 \theta_1) \eta_{it}^2 = a^2 + 2abc \cos \theta_1 + b^2 - (a^2 \cos^2 \theta_1 + 2abc \cos \theta_1 + b^2) = a^2(1 - \cos^2 \theta_1)$$

и т.о. $a = \pm \eta_{it}$.

Из геометрических рассуждений ясно, что $a < 0$, т.е. $a = -\eta_{it}$, иначе вектор T пойдет так как показано на рисунке (пунктирный вектор TT).

$$b = \eta_{it} \cos \theta_1 - \sqrt{1 + \eta_{it}^2 (\cos^2 \theta_1 - 1)}$$

и окончательно

$$T = -\eta_{it}L + \left(\eta_{it} \cos \theta_1 - \sqrt{1 + \eta_{it}^2 (\cos^2 \theta_1 - 1)} \right) N.$$

Замечание. В том случае, когда луч выходит изнутри примитива, следует для вычислений в качестве нормали брать $(-N)$.

Пересечение луча с плоскостью

Вспоминаем, что луч определяется как

$$R(t) = R_0 + R_d \cdot t, \quad t > 0,$$

где вектор направления R_d нормализованный.

Плоскость задается уравнением: $Ax + By + Cz + D = 0$, где

- $A^2 + B^2 + C^2 = 1$
- вектор нормали к плоскости - $(A, B, C) = P_n$
- расстояние до плоскости от точки $(0, 0, 0)$ равно $-D$.

Подставим уравнение луча в уравнение плоскости и разрешим относительно t :

$$t = \frac{-(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)}{Ax_d + By_d + Cz_d} \quad \text{или} \quad t = \frac{-((P_n, R_0) + D)}{(P_n, R_d)}.$$

- Если $(P_n, R_d) = 0$, то луч параллелен плоскости, и пересечения нет.
- Если $(P_n, R_d) > 0$, то нормаль плоскости направлена по лучу и отбрасывается из рассмотрения, если считать, что поверхности односторонние.
- Если $t < 0$, то пересечение с прямой, а не с лучом.

- В противном случае имеется реальное пересечение луча с плоскостью в точке $r = (x_i, y_i, z_i) = (x_0 + x_d t, y_0 + y_d t, z_0 + z_d t)$.

Алгоритм

1. Вычислим $v_d = (P_n, R_d)$. Если $v_d = 0$, то выход.
2. Если $v_d > 0$, то выход в случае односторонних поверхностей.
3. Вычислим $v_0 = -(P_n, R_0) - D$
4. Вычислим $t = v_0 / v_d$, Если $t < 0$, то выход.
5. Возврат значения $r = (x_i, y_i, z_i) = (x_0 + x_d t, y_0 + y_d t, z_0 + z_d t)$.

Пересечение луча с многоугольником

- Считаем, что многоугольник планарный.
- Сначала вычислим пересечение луча с плоскостью многоугольника.
- Затем смотрим лежит ли точка пересечения внутри многоугольника. Например, используя правило чет-нечет (even-odd).

Метод чет-нечет

Многоугольник – множество из N точек – $G_n = (x_n, y_n, z_n)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$.

Плоскость: $Ax + By + Cz + D = 0$ с нормалью $P_n = (A, B, C)$.

Точка пересечения: $R_i = (x_i, y_i, z_i)$, лежит на плоскости.

Как определить плоскость и нормаль?

Шаг 1:

- Проецируем многоугольник на одну из координатных плоскостей.
- Можно было бы применить вращение с матрицей, но это более дорого.
- Другой подход – отбросить одну из координат.
- Сохраняет топологию, но не площадь.
- Выбрасываем ту координату, чья величина в векторе нормали плоскости максимальна, например, $P_n = (-5, 2, 4)$, то отбросим все X координаты.

Шаг 2:

- Сдвинуть многоугольник так, чтобы точка пересечения попала в начало координат.

Шаг 3:

- Выпустить луч по одной из координатных осей и подсчитать четность числа пересечений этого луча со сторонами многоугольника. Если нечет, то точка внутри многоугольника.

Проблемы:

- Если вершина лежит точно на луче (или очень близко к ней), сдвинуть ее немного в сторону от луча (На сколько?).
- Если точка пересечения лежит точно на ребре, то решить произвольно: вне или внутри она. НО если это ребро делит два многоугольника, то алгоритм решения о принадлежности должен давать принадлежность только одному из них.

Алгоритм подробнее.

1. Определяем доминантную координату среди компонент вектора нормали плоскости.
2. Каждую вершину многоугольника проецируем на выбранную координатную плоскость. Для $n = 0, 1, \dots, N-1$ $(x_n, y_n, z_n) \Rightarrow (U_n, V_n)$.
3. Сдвиг начала координат плоскости UV в точку пересечения.
4. Полагаем numCrossing = 0.
5. Смотрим на первую вершину первого ребра многоугольника. Если ее \mathbf{v} -координата отрицательная, то полагаем signHolder = -1, иначе signHolder = +1.

6. Смотрим каждую пару последовательных вершин (ребра) $\left[(u'_0, v'_0), (u'_1, v'_1) \right]$, $\left[(u'_1, v'_1), (u'_2, v'_2) \right]$, ..., $\left[(u'_{N-1}, v'_{N-1}), (u'_0, v'_0) \right]$. Обработаем ребро за

ребром. Обозначим очередное ребро как $\left[(u'_a, v'_a), (u'_b, v'_b) \right]$.

- 1) Если координата \mathbf{v} второй вершины отрицательна, то nextSignHolder = -1, иначе nextSignHolder = +1.

- 2) Если nextSignHolder != signHolder, то

- Если первая и вторая \mathbf{u} координаты обе положительны, то линия пересекает $+U'$ и счетчик увеличиваем numCrossing++.
- Если одна из \mathbf{u} координат положительна, то линия может пересекаться. Значит вычисляем пересечение с осью

$$U'. \text{ Если } \left[u'_a - \frac{v'_a \cdot (u'_b - u'_a)}{(v'_b - v'_a)} \right] > 0, \text{ то мы также}$$

увеличиваем счетчик numCrossing++.

- 3) Полагаем signHolder = nextSignHolder.

7. Если numCrossing нечетно, то точка внутри многоугольника.

Пример для тренировки.

Имеем многоугольник с вершинами

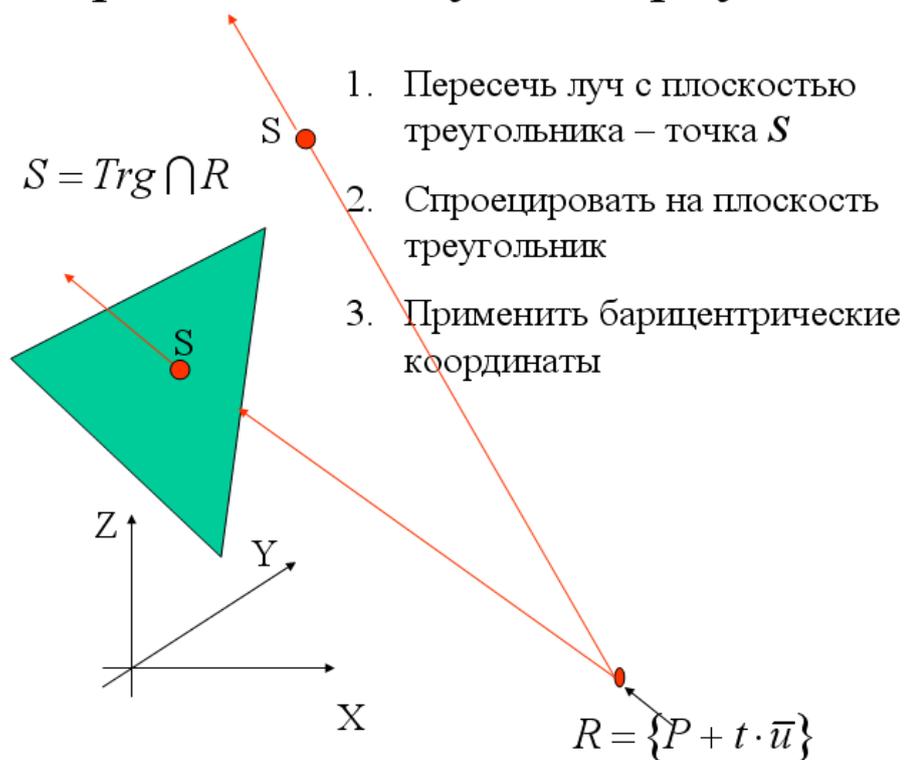
$$\{(-3, -3, 7), (3, -4, 3), (4, -5, 4)\}$$

и точку пересечения луча с плоскостью многоугольника – $(-2,-2,4)$. Определить лежит ли эта точка внутри многоугольника. Уравнение плоскости: $P = x + 2y + z - 2 = 0$.

Применение барицентрических координат

Если многоугольник – это просто треугольник, то принадлежность точки треугольнику можно определять, вычисляя барицентрические координаты точки (см. ранние лекции).

Пересечение луча с треугольником



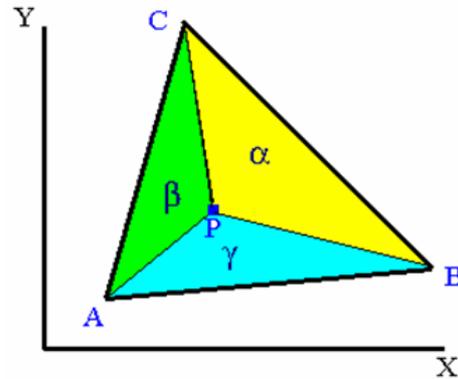
$$Area(ABC) = \frac{1}{2} \cdot [(b_x - a_x) \cdot (c_y - a_y) - (c_x - a_x) \cdot (b_y - a_y)]$$

Барицентрические координаты

- Треугольник

$$P = \alpha A + \beta B + \gamma C$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 1 \quad 1 \geq \alpha, \beta, \gamma \geq 0$$



$$\alpha = Area(PBC) / Area(ABC)$$

$$\beta = Area(APC) / Area(ABC)$$

$$\gamma = Area(ABP) / Area(ABC)$$

$$P = \sum_i \lambda_i P_i$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad \sum_i \lambda_i = 1$$

Пересечение луча с боксом

Бокс – это прямоугольный параллелепипед со сторонами, параллельными координатным осям. Бокс целиком определяется своими двумя углами.

Вспоминаем, что луч определяется как

$$R(t) = R_0 + R_d \cdot t, \text{ где } t > 0, R_0 = (x_0, y_0, z_0) \text{ и } R_d = (x_d, y_d, z_d)$$

где вектор направления R_d нормализованный.

Бокс: вершина с минимальными значениями координат $B_l = (x_l, y_l, z_l)$ и вершина с максимальными значениями координат $B_h = (x_h, y_h, z_h)$.

Алгоритм

1. Задаем $t_{near} = -\infty$, $t_{far} = +\infty$.
2. Для пары X плоскостей
 - 1) Если $x_d = 0$, то луч параллелен этим плоскостям, тогда:
 - Если $x_0 < x_l$ или $x_0 > x_h$, возвращаем **false**.
 - 2) Иначе луч не параллелен этим плоскостям. Вычисляем расстояние до пересечений с плоскостями.

- $t_1 = (x_l - x_0)/x_d$, значение параметра до минимальной X плоскости.
 - $t_2 = (x_h - x_0)/x_d$, значение параметра до максимальной X плоскости.
 - Если $t_2 < t_1$, то поменять значения t_1 и t_2 .
 - Если $t_1 > t_{near}$, то присвоить $t_{near} = t_1$.
 - Если $t_2 < t_{far}$, то присвоить $t_{far} = t_2$.
 - Если $t_{near} > t_{far}$, то с боксом нет пересечений, возвращаем **false**.
 - Если $t_{far} < 0$, то с боксом нет пересечений, он позади луча, возвращаем **false**.
3. Повторяем шаг 2 для Y , затем Z .
 4. Если все тесты прошли удачно, то возвращаем **true**.

Пример.

Луч:

- $R_0 = (0, 4, 2)$
- $R_d = (0.213, -0.436, 0.873)$

Бокс:

- $B_l = (-1, 2, 1)$
- $B_h = (3, 3, 3)$

Есть ли пересечение луча с боксом?

Пересечение луча с квадраками

Квадрик или квадратичная поверхность:

$$Q(x, y, z) = Ax^2 + Ey^2 + Hz^2 + 2Bxy + 2Cxz + 2Fyz + 2Dx + 2Gy + 2Iz + J = 0$$

$$\Rightarrow Q(x, y, z) = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ B & E & F & G \\ C & F & H & I \\ D & G & I & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = 0,$$

причём хотя бы один из коэффициентов A, E, H, B, C, F должен быть отличен от нуля.

Вспоминаем, что **луч** определяется как

$$R(t) = R_0 + R_d \cdot t, \text{ где } t > 0, R_0 = (x_0, y_0, z_0) \text{ и } R_d = (x_d, y_d, z_d)$$

где вектор направления R_d нормализованный.

Подставляем уравнение луча в уравнение квадрика и получаем после приведения подобных уравнение:

$$at^2 + bt + c = 0,$$

где

$$a = Ax_d^2 + Ey_d^2 + Hz_d^2 + 2Bx_dy_d + 2Cx_dz_d + 2Fy_dz_d,$$

$$b = 2(Ax_0x_d + Ey_0y_d + Hz_0z_d + B(x_0y_d + x_dy_0) + C(x_0z_d + x_dz_0) + F(y_0z_d + y_dz_0) + Dx_d + Gy_d + Iz_d),$$

$$c = Ax_0^2 + Ey_0^2 + Hz_0^2 + 2Bx_0y_0 + 2Cx_0z_0 + 2Fy_0z_0 + 2Dx_0 + 2Gy_0 + 2Iz_0 + J.$$

Перейдём к алгоритму.

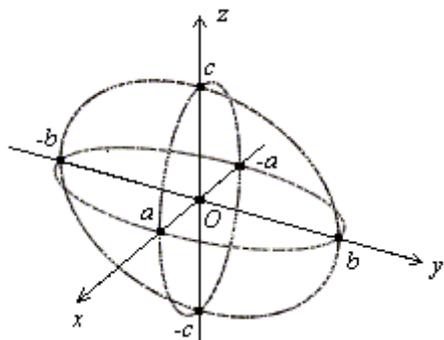
1. Если $a = 0$, тогда $t = -c/b$.
2. Если $a \neq 0$ и $b^2 - 4ac < 0$, то никаких пересечений с лучом нет.
3. Иначе вычисляем $t_0 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Если $t_0 > 0$, то полагаем $t = t_0$.
4. Иначе вычисляем $t_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Если $t_1 > 0$, то полагаем $t = t_1$.
5. Иначе пересечение происходит до R_0 , т.е. "позади" луча.
6. Вычислив t , получаем и точку $r_i = R_0 + t \cdot R_d$, и нормаль к квадрику в этой точке по формуле $r_n = (x_n, y_n, z_n) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial z} \right)$.
7.
$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} Ax_i + By_i + Cz_i + D \\ Bx_i + Ey_i + Fz_i + G \\ Cx_i + Fy_i + Hz_i + I \end{bmatrix}.$$

Поверхности второго порядка, за исключением случаев сильного вырождения, можно разделить на пять классов: эллипсоиды, гиперболоиды, параболоиды, конусы и цилиндры. Для каждой из поверхностей существует декартова прямоугольная система координат, в которой поверхность задается простым уравнением, называемым каноническим уравнением.

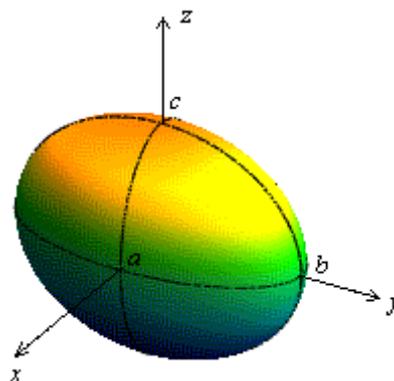
1. Эллипсоиды

Каноническое уравнение имеет вид

$$Ax^2 + Ey^2 + Hz^2 = 1, \text{ где } A, E, H - \text{положительные числа}$$



Сечения эллипсоида координатными плоскостями



Эллипсоид

где $a = \frac{1}{\sqrt{A}}, b = \frac{1}{\sqrt{E}}, c = \frac{1}{\sqrt{H}}$.

2. Параболоиды

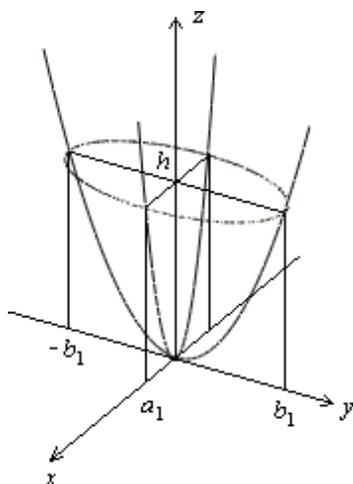
а. Эллиптический параболоид

Каноническое уравнение имеет вид

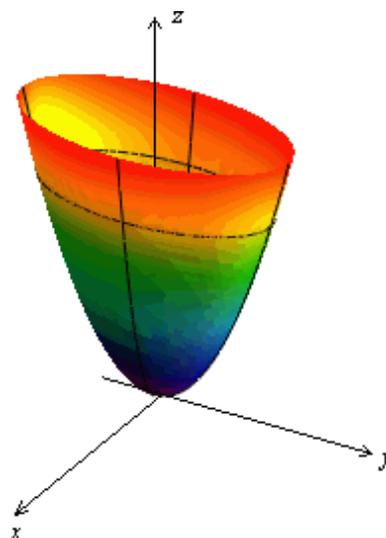
$$Ax^2 + Ey^2 - z = 0, \text{ где } A, E - \text{положительные числа.}$$

Найдем линии пересечения поверхности с плоскостью $z = h$. Преобразуем это уравнение к виду

$$\frac{A}{h}x^2 + \frac{E}{h}y^2 = 1$$



Сечения эллиптического параболоида координатными плоскостями



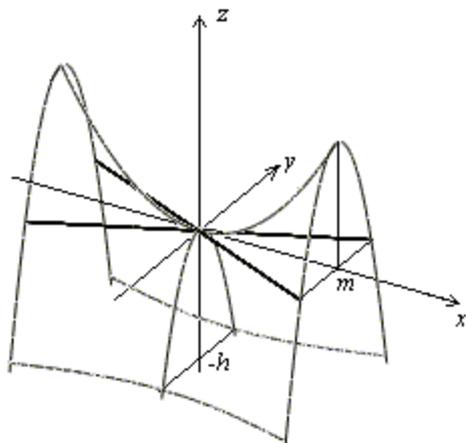
Эллиптический параболоид

где $a_1 = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{A}}, b_1 = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{E}}$.

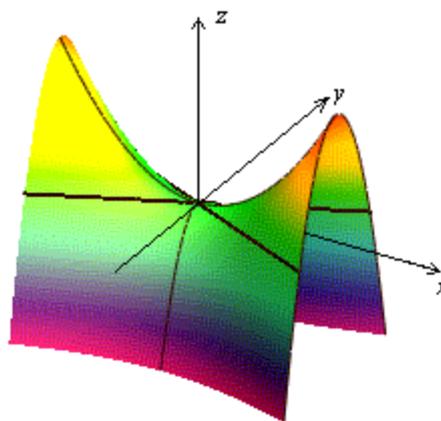
б. Гиперболический параболоид

Каноническое уравнение имеет вид

$$Ax^2 - Ey^2 - z = 0, \text{ где } A, E - \text{положительные числа}$$



Изображение гиперболического параболоида с помощью сечений



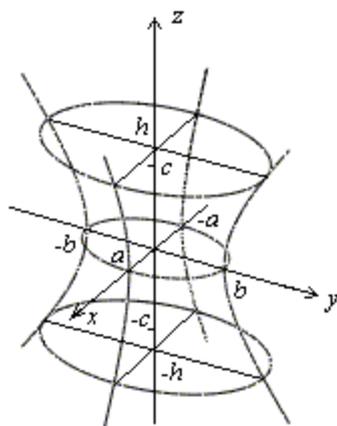
Гиперболический параболоид

3. Гиперboloиды

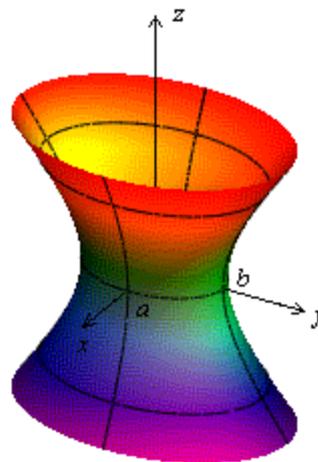
а. Однополостный гиперboloид

Каноническое уравнение имеет вид

$$Ax^2 + Ey^2 - Hz^2 = 1, \text{ где } A, E, H - \text{положительные числа}$$



Изображение однополостного гиперboloида с помощью сечений



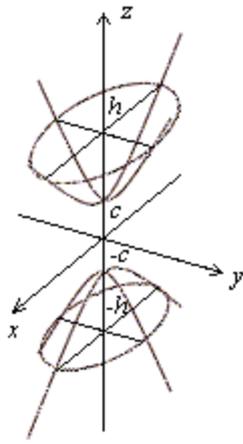
Однополостный гиперboloид

где $a = \frac{1}{\sqrt{A}}, b = \frac{1}{\sqrt{E}}, c = \frac{1}{\sqrt{H}}$.

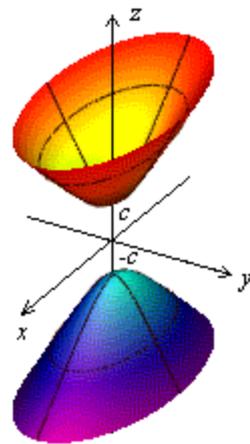
б. Двуполостный гиперboloид

Каноническое уравнение имеет вид

$$-Ax^2 - Ey^2 + Hz^2 = 1, \text{ где } A, E, H - \text{положительные числа}$$



Изображение двуполостного гиперболоида с помощью сечений



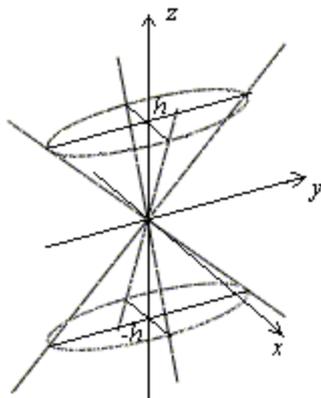
Двуполостный гиперболоид

где $a = 1/\sqrt{A}$, $b = 1/\sqrt{E}$, $c = 1/\sqrt{H}$.

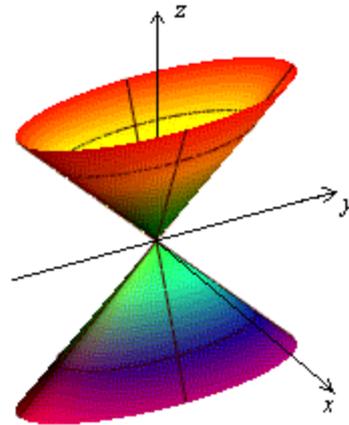
4. Конусы (или конусы второго порядка)

Каноническое уравнение имеет вид

$$Ax^2 + Ey^2 - Hz^2 = 0, \text{ где } A, E, H - \text{положительные числа}$$



Изображение конуса с помощью сечений



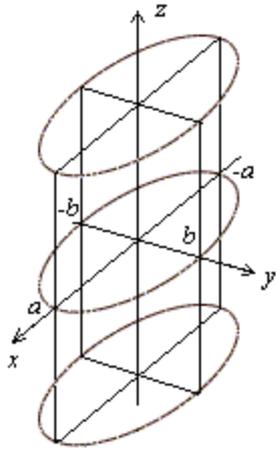
Конус

5. Цилиндры

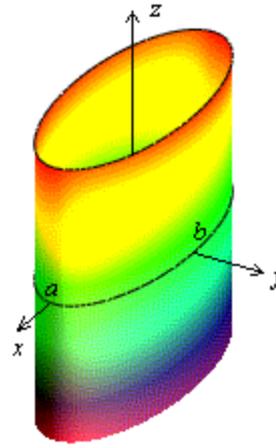
а. Эллиптический цилиндр

Каноническое уравнение имеет вид

$$Ax^2 + Ey^2 = 1, \text{ где } A, E - \text{положительные числа}$$



Изображение эллиптического цилиндра с помощью сечений



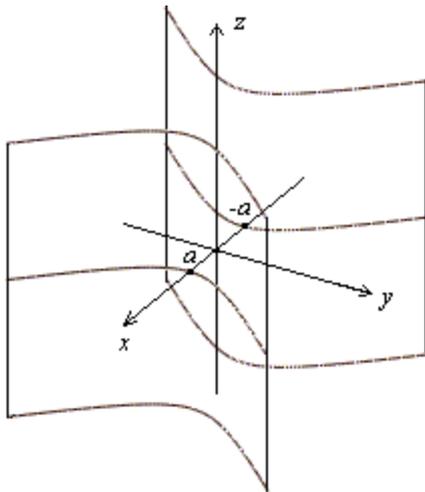
Эллиптический цилиндр

где $a = \frac{1}{\sqrt{A}}, b = \frac{1}{\sqrt{E}}$.

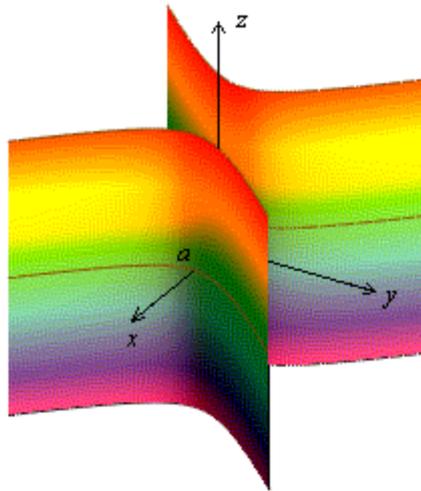
б. Гиперболический цилиндр

Каноническое уравнение имеет вид

$$Ax^2 - Ey^2 = 1, \text{ где } A, E - \text{положительные числа}$$



Изображение гиперболического цилиндра с помощью сечений



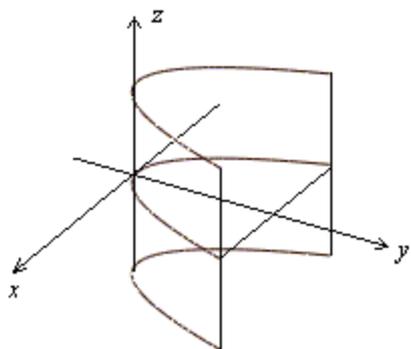
Гиперболический цилиндр

где $a = \frac{1}{\sqrt{A}}$.

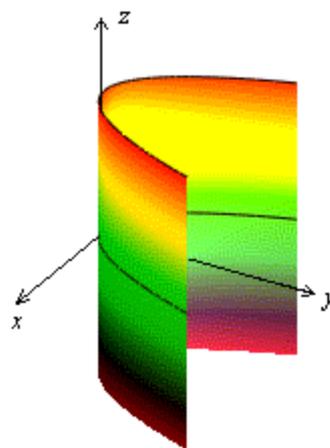
с. Параболический цилиндр

Каноническое уравнение имеет вид

$$x^2 - 2Gy = 0, \text{ где } G - \text{положительное число}$$



Изображение параболического цилиндра с помощью сечений



Параболический цилиндр